

حل مسئله در ریاضیات

عزیزه رحمانی

بسیاری از دانش‌آموزان بر این باور غلط هستند که همهٔ مسائل ریاضی مستقیم و به‌سرعت حل می‌شوند و اگر آن‌ها نتوانند مسئله‌ای را فوری حل کنند، باید حل مسئله را کنار بگذارند! چگونه می‌توان از دانش‌آموزانی که خود را حل‌کنندهٔ بی‌کفایت مسائل می‌دانند، حمایت کرد؟ بسیاری از دانش‌آموزان عقیده دارند که «فقط یک روش درست» برای حل مسائل ریاضی وجود دارد و برای تأیید راه‌حلشان به معلمان یا کلید جواب‌ها وابسته هستند. آن‌ها همچنین ضرورت تشخیص و برقراری ارتباط بین راه‌های مختلف منتهی به حل مسئله را رد می‌کنند.

برای اینکه این باور غلط آن‌ها را اصلاح کنیم، ابتدا کوشش ما معلمان این باید باشد که مسائل ریاضی را حتی الامکان مطابق با مسائل روزمرهٔ محیط زندگی دانش‌آموز طرح کنند. سپس به آن‌ها کمک کنند تا به تحلیل و تفسیر مسئله علاقه‌مند شوند. دانش‌آموزان باید بیاموزند که وقتی با مسائل ناشناخته‌ای مواجه می‌شوند، چه باید بکنند. معلمان می‌توانند به دانش‌آموزان مرتباً با بحث‌های باز دربارهٔ جنبه‌های انتقادی فرایند حل مسئله، مانند درک مسئله و به عقب برگشتن و نگاه کردن به مسئله برای اندیشیدن به حل مسئله و فرایند آن، با پرسش‌ها، مشاهدات و مدل کردن، به دانش‌آموزان کمک کنند که آن‌ها از فعالیت‌هایی که به حل مسئله منتهی می‌شود، آگاه شوند. برای مثال، مسئلهٔ زیر را ملاحظه و چگونگی رشد انگیزهٔ یادگیری و افزایش مهارت‌های ریاضیات دانش‌آموزان را در حل مسئله بررسی کنید:

طرح درس ریاضی در قالب فعالیتی برای دانش‌آموزان و معلمان (فرایند حل مسئله)

اهداف یادگیری

دانش‌آموزان می‌توانند:

- اندازهٔ طول ضلع و طول قطر مربع را به‌دست آورند.

- رابطهٔ بین طول ضلع و طول قطر مربع را پیش‌بینی و کشف کنند.

- فرمولی را برای تعیین اندازهٔ طول قطر هر مربع، از روی اندازهٔ طول ضلع آن، به‌دست آورند.

عنوان

مربع، قطر آن و ریشهٔ دوم آن (مقدمه‌ای برای تدریس رابطهٔ فیثاغورس)
در این درس دانش‌آموزان رابطهٔ بین اندازهٔ طول قطر و ضلع یک مربع را کشف می‌کنند و از آن برای پیش‌بینی تعیین اندازهٔ قطر هر مربع استفاده می‌کنند.

وسایل لازم

خط کش اندازه‌گیری

دستور العمل طرح

قبل از اینکه عنوان درس مطرح شود، برای ایجاد انگیزه یادگیری و جذاب شدن مطلب، می‌توانید بچه‌ها را به یک مکان مربع شکل ببرید. مثلاً در حیاط مدرسه روی زمین یک مربع به طول ۵ متر بکشید و بچه‌ها را به دو گروه تقسیم کنید و مسابقه‌ای ترتیب دهید؛ بدین گونه که از هر گروه یک نفر را انتخاب کنید تا هر فرد، با عبور از قطر مربع، از یک گوشه به گوشه مقابل بدود. هر که زودتر به نقطه مقابل برسد، برنده است.

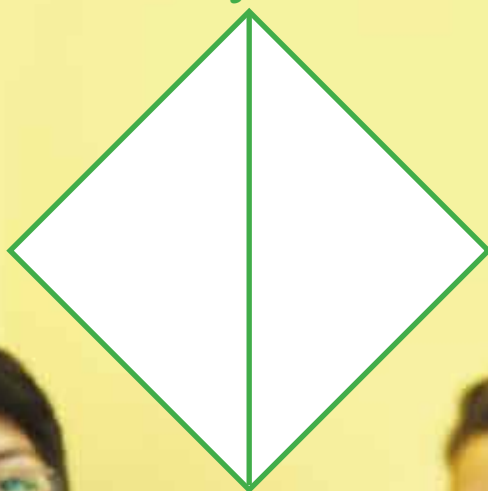
همین بازی را می‌توانید روی دو ضلع موازی این مربع ترتیب دهید، سپس از بچه‌ها بپرسید به‌طور متوسط کدام یک از بازی‌ها وقت بیشتری گرفت؟ چرا؟ بدین طریق چالش و فعالیت بچه‌ها بیشتر می‌شود و شوق یادگیری آن‌ها افزایش می‌یابد. سپس از آن‌ها بخواهید حدس بزنند که طول فاصله‌هایی که در دو مسیر متفاوت دویدند، چه مقدار است. نیز می‌توانید این سؤال را از دو یا سه نفر دیگر از هر گروه بپرسید. به‌علت زیاد بودن طول فاصله مورد نظر، بچه‌ها ممکن است با قدم زدن روی هر یک از مسیرها یا با وسیله دیگری آن را تخمین بزنند. سپس از آن‌ها بخواهید تخمین‌ها را یادداشت کنند. همچنین از آن‌ها بخواهید به همان شکلی که طول قطر را حدس زدند، طول ضلع مربع را نیز حدس بزنند.

می‌توانید ادامه این بحث‌ها را در کلاس انجام دهید. با پرسش از دانش‌آموزان درباره نتایج حدس‌هایشان و پرسش‌های غیرمستقیم درباره رابطه‌های بین این دو مسیر (طول قطر و ضلع زمین مربع شکل) می‌توانید از آن‌ها بخواهید روی رابطه قطر و ضلع زمین مربع شکل تعمق کنند و حتی به فرضیه‌سازی دست بزنند. سپس از آن‌ها بپرسید: اگر طول ضلع زمین مربع شکل ۵ متر باشد، درباره قطر آن، چه حدسی می‌زنند. با هم مشورت کنند، حاصل آن را بنویسند و سپس یک نفر کار را گزارش دهد.

طول ضلع = ۵ متر

قطر آن = ؟

شکل ۱



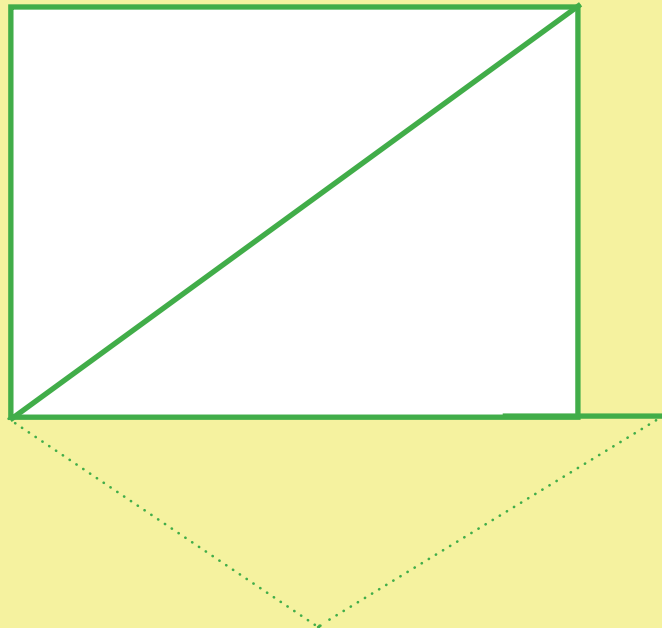
هدف اصلی ما در این درس یافتن قطر مربع است. با فعالیت‌های انجام شده دانش‌آموزان در این مسیر قرار می‌گیرند. برای اینکه به حدس صحیح‌تری برسند، آن‌ها را به چند گروه تقسیم کنید. صفحه‌های فعالیت را که به این منظور آماده کرده‌اید، به هر گروه بدهید. در هر صفحه فعالیت، شکل‌هایی از مربع‌هایی با اندازه‌های متفاوت رسم کنید و آن‌ها را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید.

شکل ۲



از آن‌ها بخواهید اندازه قطر هر یک از مربع‌ها را تخمین بزنند. بپرسید آیا می‌توانند حدس بزنند که چه رابطه‌ای بین قطر و ضلع هر یک از مربع‌ها وجود دارد. برای اینکه بچه‌ها بتوانند به ابتکار خود رابطه بین طول ضلع مربع با طول قطر آن را پیدا کنند، از آن‌ها بخواهید از شکل‌های بریده بهره بگیرند.

شکل ۳



طول ضلع $\times \frac{1}{4} \approx$ طول قطر مربع
اگر دانش‌آموزان با علائم جبری آشنا هستند، می‌توانید رابطه
فوق را بدین شکل نشان دهید:

$$d \approx \frac{1}{4} s$$

(d طول قطر و s طول ضلع است.)

دانش‌آموزان باید توجه داشته باشند که این قانون دقیق نیست
و در واقع اندازه دقیق قطر مربع عبارت است از: $d = s\sqrt{2}$
(این فرمول از رابطه فیثاغورس به‌دست می‌آید، ولی در اینجا به
دانش‌آموزان می‌گوییم، چون در ستون سوم جدول ۱ مقادیری
تقریبی وجود دارد، در فرمول از $\frac{1}{4}$ استفاده می‌کنیم). البته ممکن
است بعضی از دانش‌آموزان قانون فوق را کشف کنند و به آن برسند.
لازم است برای شروع بحث درباره اندازه طول قطر هر
مستطیل نیز از قانون فوق استفاده شود. دانش‌آموزان باید به
سؤالات صفحه فعالیت جواب دهند. علاوه بر آن باید بتوانند مسئله
زمین بازی را حل کنند و درباره تغییراتی که در ضمن تخمین زدن
طول ضلع و طول قطر هر مربع و مقایسه این دو اندازه مشاهده
کرده‌اند، بحث و استدلال کنند.

طرح سؤالاتی برای دانش‌آموزان

از دانش‌آموزان بخواهید، نتایج تعیین طول ضلع هر مربع را با
اندازه‌گیری و با قانون کشف شده درباره اندازه طول قطر هر مربع
مقایسه کنند. می‌توانید از آن‌ها سؤال کنید: شما چه قانونی برای
به‌دست آوردن قطر هر مربع با در دست داشتن اندازه طول ضلع آن
مربع پیشنهاد می‌کنید؟ دانش‌آموزان براساس اندازه‌گیری‌هایشان
باید متوجه شوند که اندازه طول قطر هر مربع تقریباً $\frac{1}{4}$ طول ضلع
آن مربع است. حال این مسئله را با دانش‌آموزان در میان بگذارید:
طول ضلع یک زمین بازی ۵۰ متر است. فاصله یک گوشه آن
زمین تا گوشه مقابلش چه قدر است؟ از آن‌ها باید سؤال شود که
چطور جواب شما با تخمینی که در ابتدای این درس زده‌اید، ارتباط
دارد؟ سپس توضیح دهید که چرا تخمین زدن آن‌ها در شروع درس
درباره این مسئله بالاتر یا پایین‌تر از جواب مسئله است.

ارزشیابی انتخابی

سطح درک دانش‌آموزان با جواب دادن به سؤالاتی که شما
در صفحه فعالیت طرح کرده‌اید، مشخص می‌شود. علاوه بر
آن، بحث‌های کلاسی درباره این سؤالات و درباره قوانینی که
دانش‌آموزان هنگام تعیین طول قطر یافته‌اند، روشن می‌سازد که
آن‌ها به اهداف مورد نظر در این درس رسیده‌اند یا خیر.

در این فعالیت دانش‌آموزان می‌توانند مربعی بسازند و با کشیدن
قطر مربع، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کنند، سپس یک قسمت
از آن را بچرخانند تا طول قطر مربع روی یکی از ضلع‌های آن قرار
گیرد تا بتوانند طول قطر آن مربع را با طول ضلعش مقایسه کنند.
شکل ۳ یک مربع 10×10 را نشان می‌دهد که به دو مثلث قائم‌الزاویه
تقسیم شده است و طول قطر آن با طول ضلعش مقایسه می‌شود.
بچه‌ها می‌توانند این فرایند را برای سایر مربع‌ها با اندازه‌های
متفاوت (از صفحه فعالیت که ساخته‌اید) انجام دهند. در اینجا بچه‌ها
متوجه می‌شوند که طول قطر این مربع کمتر از $\frac{1}{5}$ برابر طول ضلع
آن است (بدون توجه به اندازه‌گیری طول ضلع مربع). با توجه به
اندازه طول ضلع مربع شکل ۳، طول قطر آن ۱۴ واحد است.
هدف اصلی این تحقیق، درگیر کردن دانش‌آموزان با موضوع
اندازه‌گیری و آموختن طرز یادداشت کردن طول ضلع و طول
قطر هر مربعی است. هر جفت از دانش‌آموزان می‌باید با استفاده
از خط‌کش اندازه طول ضلع و طول قطرهای مربع‌هایی را که در
صفحه فعالیت طرح درسی خود ساخته‌اند به‌دست آورند و آن‌ها را در
جدولی که دارای سه ستون است، وارد کنند.

ضمن اینکه دانش‌آموزان این فعالیت را انجام می‌دهند، شما
مشاهده کنید که آیا آن‌ها از واحدهای اندازه‌گیری یکسانی استفاده
می‌کنند یا خیر. برای مثال، اگر آن‌ها طول ضلع‌ها را برحسب
سانتی‌متر به‌دست می‌آورند، باید اندازه طول قطر‌ها را نیز به
سانتی‌متر اندازه‌گیری کنند. توصیه می‌شود که دانش‌آموزان برای
انجام این فعالیت از واحد سانتی‌متر استفاده کنند.
همان‌طور که دانش‌آموزان داده‌هایشان را یادداشت می‌کنند،
می‌باید متوجه الگویی شوند که نسبت طول قطر مربع به طول
ضلع آن را نشان می‌دهد و آن حدود $\frac{1}{4}$ است. دانش‌آموزان جدولی
به‌صورت جدول ۱ آماده می‌کنند.

جدول ۱. اندازه ضلع و قطر مربع‌ها (توسط دانش‌آموزان)

طول ضلع	طول قطر	نسبت طول قطر به طول ضلع
۳	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{4}$
۴	$\frac{5}{5}$	$\frac{1}{4}$
۵	$\frac{7}{1}$	$\frac{1}{4}$

نتایج به‌دست آمده را با دانش‌آموزان در میان بگذارید و به آن‌ها
فرصت دهید درباره آن بحث و گفت‌وگو کنند. آن‌ها باید با استفاده
از اطلاعات جدول ۱، قانونی را تخمین بزنند و آن را به سایر مربع‌ها
تعمیم دهند: